Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté des Sciences de Tétouan

OPTIMISATION DES SYSTEMES ENERGETIQUES

CHAPITRE II:
OPTIMISATION NON LINEAIRE A PLUSIEURS VARIABLES

Taib AJZOUL
Professeur au Département de Physique
Faculté des Sciences de Tétouan

III-1. Différents types de problème d'optimisation

Soit la fonction non linéaire telle que :

$$x \in D \subset R^n \quad et \quad f : D \to R$$

Le problème d'optimisation (minimisation de *f(x)*) consiste en la détermination de

$$\hat{x} \in D \quad \text{tel que} \quad f(\hat{x}) < f(x) \quad \forall x \in D$$

Pour établir les conditions théoriques de minimum, on posera :

Pour le gradient :

$$f_x = \overrightarrow{grad}\ f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

Pour le Hessien :

$$f_{xx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Trois cas de problèmes d'optimisation seront distingués :

$D = R^n$ Optimisation sans contrainte

$D = \{x \mid g(x) = 0\}$ Optimisation avec contraintes égalités

$D = \{x \mid h(x) \leq 0\}$ Optimisation avec contraintes inégalités

où g(x) et h(x) sont des fonctions vectorielles de $R^n \xrightarrow[m<n]{} R^m$

.

III-2. Optimisation sans contrainte

III-2-a. Condition nécessaire du premier ordre

Dans ce qui suit, on suppose que f est dérivable jusqu'à l'ordre 2.
Soit $x \in R^n$ et δx une variable telle que :

$x' = x + \delta x$ et $f(x') \cong f(x) + f_x^T(x).\delta x$

Si on suppose que $x = \hat{x}$ est tel que $f(\hat{x})$ est minimum, on a :

$f(x') \geq f(\hat{x})$ et $\delta f = f(x') - f(\hat{x}) = f_x^T(\hat{x}).\delta x \geq 0 \quad \delta x \in R^n$

δx peut être positif ou négatif ce qui implique $\boxed{f_x(\hat{x}) = 0}$

C’est donc une condition nécessaire d'extremum local.

III-2-b. Condition nécessaire du deuxième ordre

Soit $x' = \hat{x} + \delta x$ *où* $\hat{x}$ est tel que $f(\hat{x})$ est un minimum local. On a

$$f(x') \cong f(\hat{x}) + 0 + \frac{1}{2}\delta x^T f_{xx}(\hat{x}).\delta x$$

Or

$$f(x') \geq f(\hat{x}) \Rightarrow \delta x^T f_{xx}(\hat{x}).\delta x \geq 0$$

$f_{xx}(\hat{x})$ est donc définie non négative, on note $f_{xx}(\hat{x}) \geq 0$

Conclusion : condition nécessaire de minimum :

$$\boxed{f_x(\hat{x}) = 0 \quad et \quad f_{xx}(\hat{x}) \geq 0}$$

III-2-c. Condition suffisante du minimum

Si $f_{xx}(\hat{x})$ est définie positive le minimum est strict et la condition :

$$f_{xx}(\hat{x}) > 0$$

est alors une condition suffisante de minimum.

- Si la matrice hessienne est définie positive, la fonction atteint un **minimum local** au point critique ;
- Si la matrice hessienne est définie négative, la fonction atteint un **maximum local** au point critique ;
- Si la matrice hessienne a des valeurs propres de chaque signe (au moins une valeur propre positive et une valeur propre négative), le point critique est un **point selle ou col**.

III-2-d. Cas de fonctions quadratiques

Considérons une fonction quadratique de la forme :

$$f(x) = a + b^T x + x^T c x$$

Cherchons la première condition :

$$f_x(x) = b + 2cx$$

et

$$f_x(\hat{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2c\hat{x} = -b$$

Si $dét\ c \neq 0$

$$\boxed{\hat{x} = -\frac{1}{2} c^{-1} b}$$

La condition du deuxième ordre entraîne :

$$f_{xx}(\hat{x}) = 2c \geq 0$$

Donc, pour que $f(\hat{x})$ soit minimum il faut que c soit définie non négative.

Si c>0 : minimum absolu strict ($\hat{x}$ unique).

Si c< 0: maximum absolu strict ($\hat{x}$ unique).

Exemple 1 :

Déterminer la nature des extremums de la fonction suivante :

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2 + 1)^2 + (x_1 - 3x_2)^2 + 1$$

Les conditions du premier ordre donnent :

$$\begin{cases} f_{x_1} = 4(2x_1 - x_2 + 1) + 2(x_1 - 3x_2) = 0 \\ f_{x_2} = -2(2x_1 - x_2 + 1) - 6(x_1 - 3x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 10x_2 = -4 \\ -10x_1 + 20x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3/5 \\ x_2 = -1/5 \end{cases}$$

Les conditions du deuxième ordre donnent :

$$f_{xx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$$

f_{xx} est définie positive, donc la solution correspond à un minimum.

Exemple 2

Déterminer x_1, x_2, x_3 qui extrémalisent :

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \qquad \text{avec} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Dans ce cas on peut exprimer l'une des variables en fonction des deux autres variables et on se ramène à un problème sans contraintes, comme dans le cas de l'exemple 1.

La solution, correspond à un maximum.

Cas d'une fonction de 2 variables

- Le point $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ est un point critique de la fonction $f(x_1, x_2)$ si :

$$\nabla f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 0 \qquad (\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 0 \, ; \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 0)$$

- Un point critique de *f* qui n'est pas un extremum est appelé point selle ou col.

Dans ce cas de fonction de 2 variables la matrice Hessienne est donnée par :

$$f_{xx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

On pose :

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \quad ; \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \quad ;$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \quad ; \quad D = AC - B^2$$

D est le déterminant de la matrice Hessienne.

Théorème :

Soit $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ un point critique : Point de minimum ou point de maximum ou point selle (point col).

1) Si $D > 0$ et $A > 0$, alors $f(x_1, x_2)$ présente un minimum local au point $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.

2) Si $D > 0$ et $A < 0$, alors $f(x_1, x_2)$ présente un maximum local au point $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.

3) Si $D < 0$, alors $f(x_1, x_2)$ présente un point selle (point col) au point $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.

Le théorème ne permet pas de conclure si $D = 0$ (une étude supplémentaire est nécessaire). Ce point est dit dégénéré.

Exemple de cas d'un minimum

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\begin{cases} f_{x_1} = 2x_1 = 0 \\ f_{x_2} = 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0,0)$$

Les conditions du deuxième ordre donnent :

$$f_{xx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ donc A=2 et D = 4

$D > 0$ et $A > 0$, alors f présente un minimum local au point $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0,0)$

Exemple cas d'un maximum

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$$

$$\begin{cases} f_{x_1} = -2x_1 = 0 \\ f_{x_2} = -2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0, 0)$$

Les conditions du deuxième ordre donnent :

$$f_{xx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$ donc A=-2 et D = 4

$D > 0$ et $A < 0$, alors f présente un maximum local au point $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0, 0)$

- Exemple de cas d'un un point selle (point col)

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

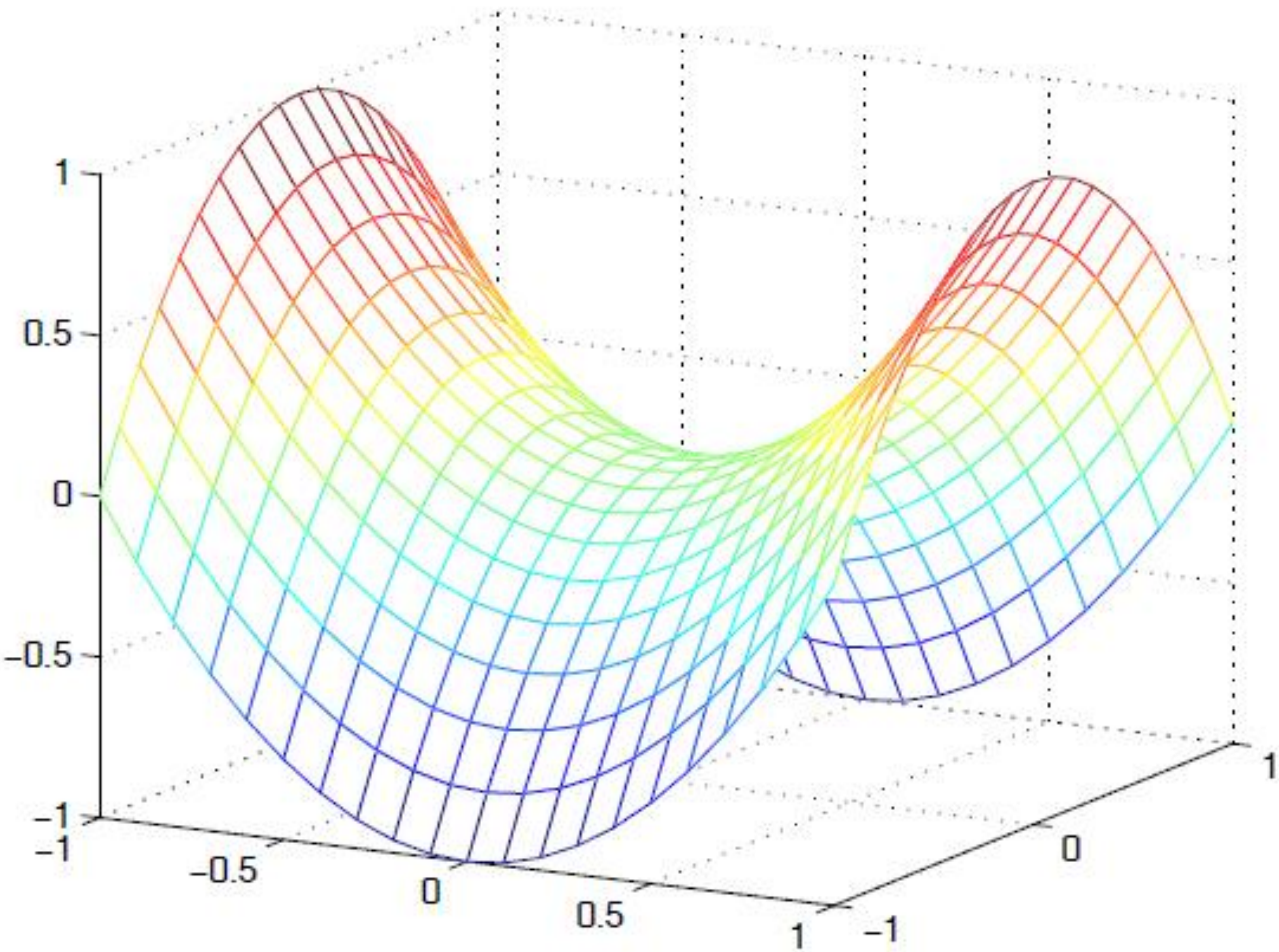
$$\begin{cases} f_{x_1} = 2x_1 = 0 \\ f_{x_2} = -2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0,0)$$

Les conditions du deuxième ordre donnent :

$$f_{xx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$ donc A=2 et D =- 4

$D < 0$, alors $f(x_1, x_2)$ présente un point selle (point col) au point

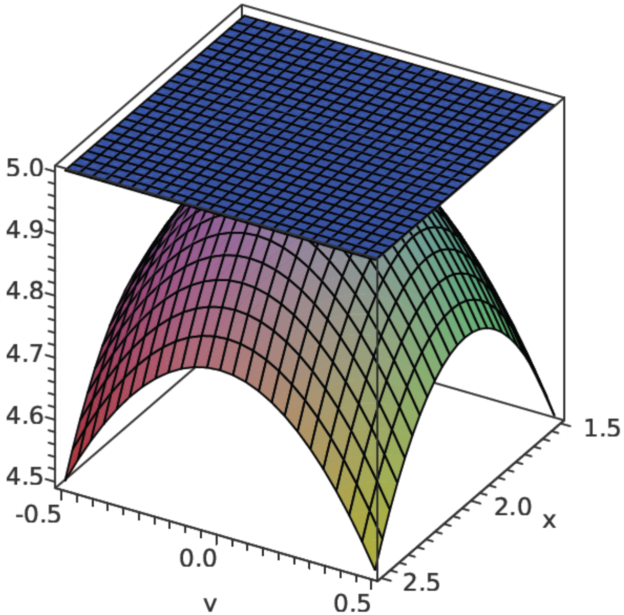
$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0,0)$$

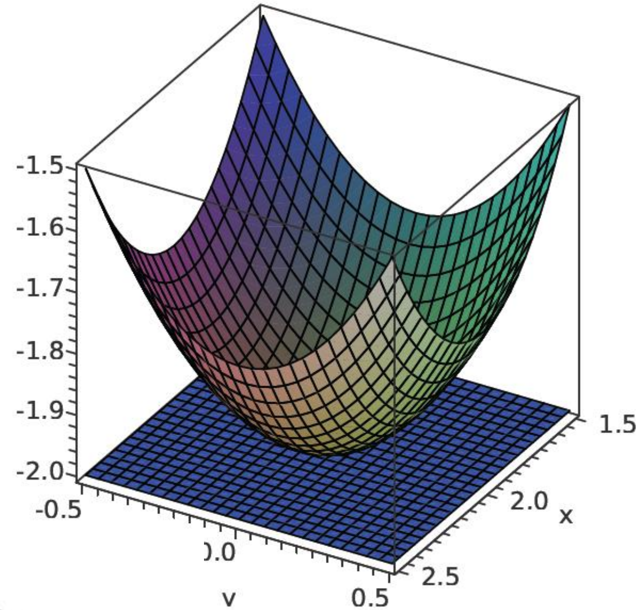


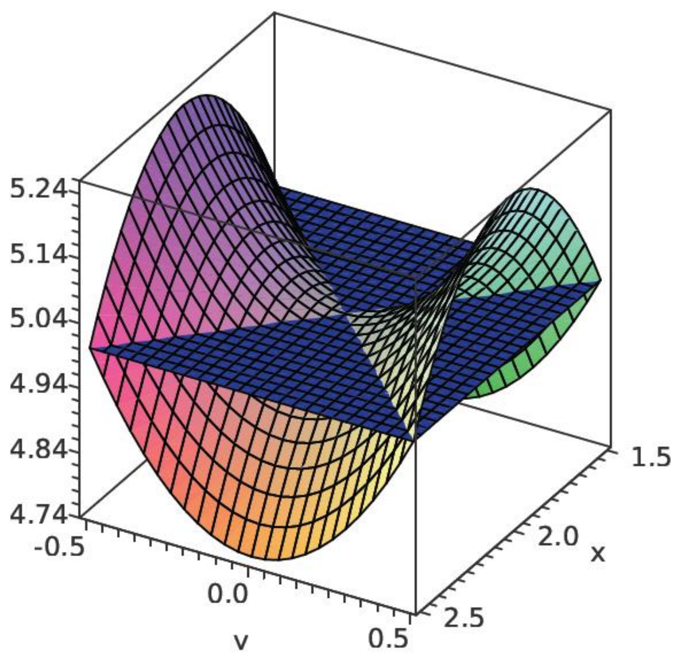
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0,0)$ Est le point selle (point col)

Maximum, Minimum et point selle







III-3. Optimisation avec contrainte égalité

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \underset{x}{Min}\ f(x) \\ \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Avec $$g : R^n \to R^m \quad (m < n)$$

Et $$g(x) = \left[g^1(x), g^2(x), \ldots, g^m(x) \right]^T$$

On notera ;

$$g_x(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g^1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g^1}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial g^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g^m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g^m}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial g^m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left[g^i_{x_j} \right]$$

On dira que x est un point régulier de g si $rang \; g_x(x) = m$. Dans ce cas les contraintes sont indépendantes

III-3-a. Condition du premier ordre

Pour qu'un point régulier $\hat{x}$ soit un extremum local de *f(x)* sous *g(x) = 0*, il est nécessaire qu'il existe un vecteur $\lambda \neq 0$ telle que la fonction :

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

Soit extrémale (minimale ou maximale) par rapport à x et à λ.
C'est-à-dire :

$$\begin{cases} L_x(\hat{x},\lambda) = 0 \\ L_\lambda(\hat{x},\lambda) = 0 \end{cases}$$

- *L* est appelé Lagrangien
- les λ_i sont les paramètres de Lagrange.

On ramène donc un problème avec contrainte en un problème sans contrainte.

III-3-b. Condition du second ordre

Pour que $\hat{x}$ soit un minimum local de f il faut :

$$\delta x^T L_{xx}(\hat{x},\lambda).\delta x \geq 0$$

$L_{xx}(x,\lambda)$ doit être définie non négative dans le sous espace *E*.

En conclusion, la condition nécessaire du minimum local est :

$$\begin{cases} L_x(\hat{x},\lambda) = 0 \\ L_\lambda(\hat{x},\lambda) = 0 \\ L_{xx}(\hat{x},\lambda) \geq 0 \quad dans \quad E = \left\{ \upsilon \middle| g_x.\upsilon = 0 \right\} \end{cases} .$$

On a ainsi amené à étudier les racines de l'équation en ω :

$$dét\begin{bmatrix} \omega.1-L_{xx} & : & g_x^T \\ ... & ... & ... \\ g_x & : & 0 \end{bmatrix}=0 \quad \text{or} \quad \begin{cases} L_{\lambda x} = g_x \\ L_{x\lambda} = g_x^T \\ L_{\lambda\lambda} = 0 \end{cases}$$

Ceci nous conduit à l'examen des racines de

$$dét\begin{bmatrix} \omega.1-L_{xx} & L_{x\lambda} \\ & \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda\lambda}=0 \end{bmatrix}=0$$

Résumé: Condition nécessaire de minimum local

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

$$\begin{cases} L_x(\hat{x},\lambda) = 0 \\ \\ L_\lambda(\hat{x},\lambda) = 0 \end{cases}$$

Racines de

$$d\acute{e}t \begin{bmatrix} \omega.1 - L_{xx} & L_{x\lambda} \\ \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda\lambda} = 0 \end{bmatrix} = 0$$

positives ou nulles.

III-3-c. Exemple

Déterminer x_1, x_2 qui maximisent

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

Avec

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Solution

$$Max\ f(x_1, x_2) = -Min\left[-f(x_1, x_2)\right]$$

Soit

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) \quad \Rightarrow$$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = -x_1 x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Les conditions du premier ordre donnent :

$$\begin{cases} L_{x_1} = -x_2 + 2\lambda x_1 = 0 \\ L_{x_2} = -x_1 + 2\lambda x_2 = 0 \\ L_\lambda = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \\ \lambda = \dfrac{x_2}{2x_1} = 0,5 \end{cases}$$

Les conditions du second ordre imposent le calcul des racines de

$$d\acute{e}t \begin{bmatrix} \omega.1 - L_{xx} & L_{x\lambda} \\ & \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda\lambda} = 0 \end{bmatrix} = 0$$

Comme $$\begin{cases} L_{x_1} = -x_2 + 2\lambda x_1 \\ L_{x_2} = -x_1 + 2\lambda x_2 \\ L_\lambda = x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{cases}$$

On a

$$L_{xx} = \begin{bmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 2\lambda \end{bmatrix} \quad ; \quad L_{x\lambda} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad L_{\lambda x} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$d\acute{e}t \begin{bmatrix} \omega.1 - L_{xx} & L_{x\lambda} \\ \\ L_{\lambda x} & L_{\lambda\lambda} = 0 \end{bmatrix} = 0 \; ; \; \begin{bmatrix} \omega - 2\lambda & 1 & 2x_1 \\ 1 & \omega - 2\lambda & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \omega-2\lambda & 1 & 2x_1 \\ 1 & \omega-2\lambda & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix}=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\left(\omega-2\lambda\right).(-4x_2^2)-1\left(-4x_1x_2\right)+2x_1\left[2x_2-\left(\omega-2\lambda\right).2x_1\right]=0 \qquad \Rightarrow$$

$$4\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(2\lambda-\omega\right)+8x_1x_2=0$$

$$4\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(2\lambda - \omega\right) + 8x_1x_2 = 0$$

Or $\qquad x_1^2 + x_2^2 = 1$

D'où $\qquad 2\lambda - \omega + 2x_1x_2 = 0$

Finalement $\qquad \omega = 2\left(\lambda + x_1x_2\right) = 2$

$\omega > 0$ donc $x_1 = x_2 = 1/\sqrt{2}$ correspond à un minimum de (-*f*), donc à un maximum de *f*.

III-4. Optimisation avec contraintes inégalités

Le problème est le suivant :

$$\begin{cases} \underset{x}{Min}\, f(x) \\ h(x) \leq 0 \end{cases}$$

Avec $h : R^n \rightarrow R^m \quad (m < n)$

Et $h(x) = \left[h^1(x), h^2(x), \ldots, h^m(x) \right]^T$

Une contrainte est saturée si $h^i(x) = 0$

Utilisons des variables supplémentaires pour se ramener au cas de contraintes égalités.

Soit

$$y^2 = \left[y_1^2, \ldots, y_m^2 \right]^T \in R^m \quad tel\ que \quad h(x) + y^2 = 0$$

$$L(x, y, \mu) = f(x) + \mu^T \left[h(x) + y^2 \right]$$

III-4-a. Condition du premier ordre

Les conditions du premier ordre donnent :

$$\begin{cases} L_x = f_x(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \, h_x^i(\hat{x}) = 0 \\ L_{y_i} = 2\mu_i \, y_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \\ L_\mu = 0 \end{cases}$$

Si on considère $\psi(x, \mu) = f(x) + \mu^T h(x)$

Alors $\psi_x = L_x = 0$

$$\mu_i \, y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i = 0 \quad \text{si} \quad y_i \neq 0 \quad \text{c-à-d si} \quad h^i(x) < 0$$

Les conditions du premier ordre sont équivalentes à celles du cas des contraintes égalités. Les paramètres μ_i sont nuls si la contrainte correspondante est satisfaite et non saturée. Les paramètres μ_i sont appelés paramètres de Kuhn et Tucker.

III-4-b. Condition du second ordre

Les conditions du second ordre sont également équivalentes à celles du cas des contraintes égalités; L_{xx} doit être définie non négative dans le sous espace :

$$E = \left\{ \upsilon \middle| h_x^i(x).\upsilon = 0 \right\}$$

Résumé: condition nécessaire

En un point $\hat{x}$, $f(\hat{x})$ admet un minimum relatif dans $D = \{x \mid h(x) \leq 0\}$, s'il existe des paramètres $\mu_i \geq 0$ tels que :

$$L(x, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i h^i(x)$$

Vérifie :
$$\begin{cases} L_x(\hat{x}) = L_\mu(\hat{x}) = 0 \\ \mu_i h^i(\hat{x}) = 0 \quad h^i(\hat{x}) \leq 0 \\ L_{xx} \geq 0 \quad dans \quad E = \{\upsilon \mid h_x^i(\hat{x}).\upsilon = 0\} \end{cases}$$

III-4-c. Exemple

Déterminer x_1 *et* x_2 qui minimisent :

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 - 10x_2 + x_2^2$$

Avec

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$$

Solution:

$$L(x,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i h^i(x) \quad \Rightarrow$$

$$L(x,\mu) = f(x_1, x_2) + \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 5 + e_1^2) + \mu_2(3x_1 + x_2 - 6 + e_2^2)$$

Avec $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 - 10x_2 + x_2^2$

Les conditions du premier ordre donnent :

$$L_{x_1} = 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_1 + 3\mu_2 = 0$$
$$L_{x_2} = 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_2 + \mu_2 = 0$$
$$L_{\mu_1} = x_1^2 + x_2^2 - 5 + e_1^2 = 0$$
$$L_{\mu_2} = 3x_1 + x_2 - 6 + e_2^2 = 0$$
$$L_{e_1} = 2\mu_1 e_1$$
$$L_{e_2} = 2\mu_2 e_2$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$$

Il faut envisager les divers cas correspondant aux contraintes saturées :

2 contraintes non saturées

i) $\begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

ne satisfait pas la première contrainte.

1 contrainte non saturée

ii) $\begin{cases} \mu_1 \neq 0 \quad ; \quad e_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \quad ; \quad e_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 = 1 \end{cases}$

Les conditions du second ordre imposent le calcul des racines de

$$L_{x_1} = 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_1 + 3\mu_2 = 0$$
$$L_{x_2} = 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_2 + \mu_2 = 0$$
$$L_{\mu_1} = x_1^2 + x_2^2 - 5 + e_1^2 = 0$$

$$d\acute{e}t \begin{bmatrix} \omega.1 - L_{xx} & L_{x\mu} \\ L_{\mu x} & L_{\mu\mu} = 0 \end{bmatrix} =$$

$$d\acute{e}t \begin{bmatrix} \omega - (4 + 2\mu_1) & -2 & 2x_1 \\ -2 & \omega - (2 + 2\mu_1) & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix}_{\substack{x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ \mu_1 = 1}} = 0$$

$$64 - 20\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 3.2$$

On a donc un minimum car $\mu_1 > 0$ *et* L_{xx} définie positive dans le sous espace défini par $h_x^1 \delta x = 0$.

iii) $$\begin{cases} \mu_1 = 0 \quad ; \quad e_1 \neq 0 \\ \mu_2 \neq 0 \quad ; \quad e_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 0.4 \\ x_2 = 4.8 \\ \mu_2 = -0,4 \end{cases}$$

$\mu_2 < 0$ ce point ne correspond pas à un minimum.